

الثانية باك لوريا

الدوال العددية 1

ذ. علي تاموسيت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 2x} ; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$. f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن f متصلة على D_f .
3. بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. اعط جدول تغيرات الدالة f .
5. لتكن h قصور الدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

أ. بين أن h تقابل من المجال $[1; +\infty[$

نحو مجال J يجب تحديده.

ب. حدد الدالة العكسية للدالة h لكل x

من J .

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$. f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

1. بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) > 0$.
2. أحسب نهايات f عند محداث حيز تعريف الدالة f .
3. ادرس تغيرات الدالة f .
4. بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{-1}{f(x)} = x - \sqrt{x^2 + 1}$.
5. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J من \mathbb{R} يجب تحديده.
6. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .
7. استنتج تغيرات الدالة f^{-1} .

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$. h(x) = x^3 - 3x - 1$$

1. ادرس تغيرات الدالة h .

تمرين 1

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 1}{2x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \operatorname{tg} x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-3}}{x-4} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-3x+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cos x \sin x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2 \cos x - \sqrt{2}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + |x|}{3x - 2|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-2)}{\sin(x-1)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(2\operatorname{tg} x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} x \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$$

$$** \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \sqrt[3]{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{2x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} x - \sin x}{x}$$

ذ. علي تاموسيت

الدوال العددية 1

الثانية باك لوريا

7. حدد تعبير $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 8

بين أن المعادلة:

$$\theta \in]0; \pi[; \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$$

تقبل حلا على الأقل.

تمرين 9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة f في $x_0 = 0$.
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$.
3. أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

تمرين 10

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{|x-2| - 2}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.
3. اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة عليها.

تمرين 11

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$$

1. ادرس تغيرات الدالة g .
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

$$\text{من المجال }]\frac{5}{2}; 3[.$$

تمرين 12

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال $[a; b]$ حيث $a < b$

نفترض أن:

• f و g متصلتان على $[a; b]$ و قابلتان

للاشتقاق على $]a; b[$.

• $\forall x \in]a; b[\quad |f'(x)| \leq g'(x)$

1. بين أن g دالة تزايدية على $[a; b]$.

2. بين أن المعادلة $h(x) = 0$ (E) تقبل ثلاث حلول حقيقية.

3. احسب $\cos 3\alpha$ بدلالة $\cos \alpha$.

4. نضع $x = 2 \cos \alpha$ ، استنتج الجذور الثلاث للمعادلة (E) على شكلها المثلي.

تمرين 5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة f في $x_0 = 0$.
2. ادرس زوجية الدالة f .
3. ادرس رتبة الدالة f على \mathbb{R}^+ ثم استنتج رتابتها على \mathbb{R} .
4. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد الدالة العكسية f^{-1} .

تمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$$

1. حدد D_f .
2. أحسب نهايات f عند محداث D_f .
3. بين أن f تناقصية قطاعا على $] -1; 0[$.
4. بين أن f تقابل من $] -1; 0[$ نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد f^{-1} .

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3} - 2$$

1. حدد D_f .
2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 3.
4. بين أن: $\forall x \in D_f; f(x) = (\sqrt{x-3} + 1)^2$.
5. اعط تغيرات الدالة f .
6. بين أن f تقابل من D_f نحو مجال J يجب تحديده.

3. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$(\forall x \in D_f): f(x) = a + \frac{b}{1 - \sqrt{x}}$$

4. بين أن f تزايدية قطعاً على المجال $[0; 1[$.

5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0; 1[$.

a. بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} .

b. حدد مجموعة تعريف g^{-1} .

c. حدد تعبير g^{-1} .

تمرين 17

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x - 1$$

1. بين أن f متصلة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

2. بين أن f تزايدية قطعاً على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. حدد صورة المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ بالدالة f .

4. استنتج أن:

$$\left(\exists! \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[: \operatorname{tg} \alpha = \alpha + 1\right.$$

تمرين 18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f .

2. بين أن f دالة زوجية.

3. بين أن الدالة f تقبل تمديداً بالاتصال في

$$x_0 = 0$$

تمرين 19

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0; 1]$ بحيث:

$$\forall x \in [0; 1], \quad 1 < f(x) \leq 2$$

ولتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0; 1]$ بما يلي:

$$\forall x \in [0; 1], \quad g(x) = xf(x) - 1$$

1. بين أن g متصلة على المجال $[0; 1]$.

2. حدد إشارة كل من $g(0)$ و $g(1)$.

3. استنتج أن: $\exists c \in]0; 1[\quad f(c) = \frac{1}{c}$

2. بين أن تناقصية على

$[a; b]$ ، ثم استنتج أن:

$$f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$$

3. بين أن $(f+g)$ تزايدية على $[a; b]$ ،

ثم استنتج أن:

$$-(f(b) - f(a)) \leq g(b) - g(a)$$

4. استنتج أن:

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

تمرين 13

لتكن f دالة عددية معرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} و قابلة

للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$ بحيث $f(0) = 0$ و

$$f'(0) = 1$$

حدد النهاية التالية:

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \times f(2x) \times \dots \times f(nx)}{x^n}$$

تمرين 14

بين أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ حيث:

$$1 - \sin \alpha = \alpha$$

تمرين 15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2. أحسب نهايات f عند محداث D_f .

3. احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

4. ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0; 1]$.

a. بين أن g تقابل من المجال $[0; 1]$

نحو مجال J يجب تحديده.

b. حدد تعبير g^{-1} .

تمرين 16

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما

يلي:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2. أحسب نهايات f عند محداث D_f .

تمرين 20

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$$

1. تحقق من أن:

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

2. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. ليكن x و y من $[1; +\infty[$ بحيث $x < y$

فان $f(x)$ و $f(y)$ ثم استنتج رتبة f

على $[1; +\infty[$.

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

في المجال $[1; +\infty[$.

5. بين أن α يحقق: $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$

6. استنتج قيمة α .

تمرين 21

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$$

1. بين أن: $f'(x) = 3 \sin^3 x$ ($\forall x \in [0; \pi]$)

2. استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0; \pi]$.

3. بين أن: $\exists! \alpha \in]0; \pi[\quad f(\alpha) = \sqrt{2}$

تمرين 22

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0; 1]$ حيث:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(1) = 1$$

بين أن: $\exists c \in]0; 1[\quad f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

تمرين 23

بين أن المعادلة $x^3 + 4x + 2 = 0$ تقبل حلا وحيدا في

\mathbb{R} .